پاسخنامه تشریحی فصل نوزدهم

آزمون جامع ۱

۱. گزینهٔ «۳»

$$x^2+y^2+2x-4y-120=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}O(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})=(-1,2)\\ R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{4+16-4\times(-120)}\end{cases}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{500}=5\sqrt{5}$$

$$x^2+y^2-2x+4y-40=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}O'(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})=(1,-2)\\ R'=\frac{1}{2}\sqrt{4+16-4(-40)}=\frac{1}{2}\sqrt{180}=3\sqrt{5}\end{cases}$$

$$OO'=\sqrt{(-1-1)^2+(2+2)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

$OO'=R-R'\Rightarrow$ دو دایره مماس داخلی‌اند.

۲. گزینهٔ «۴»

در هر بیضی مجموع فواصل هر نقطهٔ دلخواه از بیضی تا دو کانون برابر $2a$ است و در این مسئله خواسته شده است که این مقدار یعنی $2a$، چند برابر فاصلهٔ کانونی یعنی $2c$ است، پس نسبت $\frac{2a}{2c}$ یا $\frac{a}{c}$ یا $\frac{1}{e}$ را خواسته است، پس:

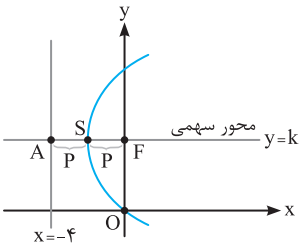
$$e=\sqrt{1-\frac{\text{ضریب کوچک‌تر بین ضرایب } x^2 \text{ و } y^2}{\text{ضریب بزرگ‌تر بین ضرایب } x^2 \text{ و } y^2}}$$

$$=\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{e}=2\Rightarrow\frac{a}{c}=2\Rightarrow a=2c$$

۳. گزینهٔ «۴»

با توجه به توضیحات داده شده در مسئله باید سهمی افقی و دهانه‌اش به سمت راست باز شود، مانند شکل زیر:

با توجه به شکل داریم:



$$AF=2P=4\Rightarrow P=2$$

$$SF=SA=P=2\Rightarrow S(-2,k)$$

بنابراین:

حال معادلهٔ سهمی را می‌نویسیم:

$$(y-k)^2=4P(x-h)\xrightarrow{h=-2}(y-k)^2=4\times2\times(x+2)\quad(1)$$

سهمی از نقطهٔ $O(0,0)$ گذشته است، پس مختصات نقطهٔ O در معادلهٔ سهمی صدق می‌کند:

$$(0-k)^2=8(0+2)\Rightarrow k^2=16\Rightarrow k=\pm4$$

با توجه به شکل $k=4$ قابل قبول است، پس معادلهٔ سهمی به شکل زیر قابل بیان است:

$$\xrightarrow{(1)}(y-4)^2=8(x+2)$$

۴. گزینهٔ «۴»

ابتدا از معادلهٔ داده‌شده به کمک مشتق مختصات مرکز را به دست می‌آوریم:

$$x^2+my^2+4x+2y+m=0\Rightarrow\begin{cases}f'_x=2x+4=0\Rightarrow x=-2\\ f'_y=2my+2=0\Rightarrow y=\frac{-1}{m}\end{cases}$$

شرط هذلولی $\Rightarrow F(h,k)\neq0$

$$\Rightarrow(-2)^2+m(\frac{-1}{m})^2+4(-2)+2(-\frac{1}{m})+m\neq0$$

$$\Rightarrow4+\frac{1}{m}-8-\frac{2}{m}+m\neq0\xrightarrow{\times m}m^2-4m-1\neq0$$

$$\Rightarrow m\neq\frac{4\pm\sqrt{16-4\times1\times(-1)}}{2\times1}\Rightarrow m\neq\frac{4\pm2\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow m\neq2\pm\sqrt{5}\quad(1)$$

از طرفی در معادلهٔ هذلولی ضرایب x^2 و y^2 مختلف‌العلامه هستند. چون ضریب x^2 مثبت است می‌بایست ضریب y^2 منفی باشد، پس:

$$m<0\quad(2)$$

از طرفی به‌ازای $m=0$ معادله به یک سهمی تبدیل می‌شود، پس:

$$\begin{cases}m\neq2\pm\sqrt{5} & (1)\\ m<0 & (2)\end{cases}\Rightarrow m<2-\sqrt{5}$$

چون گزینهٔ «۱» شامل $m=2-\sqrt{5}$ هم می‌شود که غیرقابل قبول است.

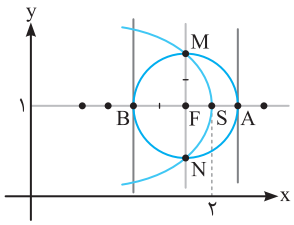
۵. گزینهٔ «۴»

با توجه به معادلهٔ سهمی، متوجه می شویم که سهمی افقی و دهانهٔ آن به سمت چپ باز می‌شود: $y^2-2y+x-1=0\Rightarrow y^2-2y=-x+1$

$$\xrightarrow{+1}y^2-2y+1=-x+2\Rightarrow(y-1)^2=-(x-2)$$

$$\xrightarrow[(y-k)^2=-4p(x-h)]{\text{مقایسه با فرم اصلی سهمی}}\begin{cases}s(h,k)=(2,1)\\ 4p=1\Rightarrow p=\frac{1}{4}\end{cases}$$

یادآوری: می‌دانیم که در سهمی، وتری که در کانون بر محور سهمی عمود است، اندازه‌اش برابر $MN=4p$ است، پس کافی است شکل سهمی و دایرهٔ مورد نظر را رسم کنیم.



نقطهٔ F (کانون سهمی و مرکز دایره و $FN=FM=FA=2p$ شعاع دایره است، پس داریم:

$$S(h,k)\Rightarrow S(2,1)$$

$$F(h-p,k)\Rightarrow F(2-\frac{1}{4},1)=(\frac{7}{4},1)$$

پس با توجه به گزینه‌ها که همگی به صورت $x = x_0$ داده شده است، باید x_A یا x_B جواب مسئله باشد.

$$\begin{cases} x_A = x_F + AF = \frac{7}{4} + 2\times\frac{1}{4} = \frac{9}{4} \\ x_B = x_F - BF = \frac{7}{4} - \frac{2}{4} = \frac{5}{4} \end{cases}$$

۶. گزینهٔ «۴»

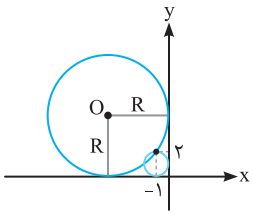
با توجه به گزینه‌ها، مختصات نقطهٔ $(-1,1)$ فقط در گزینهٔ «۴» صدق می‌کند. از طرفی مرکز بیضی همواره در وسط دو کانون قرار دارد، یعنی:

$$O = \frac{F+F'}{2} \Rightarrow O\left|\begin{array}{l} \frac{3+3}{2} = 3 \\ \frac{-2+4}{2} = 1 \end{array}\right. \Rightarrow O(3,1)$$

و چون طول دو کانون با هم برابرند، پس بیضی قائم است که این دو شرط در گزینهٔ «۴» دیده می‌شود.

۷. گزینهٔ «۱»

نقطهٔ داده شده در ناحیهٔ دوم مختصات قرار دارد، پس دایره‌ای به شعاع دلخواه R در ربع دوم رسم می‌کنیم تا بر هر دو محور مختصات مماس باشد. با توجه به شکل مختصات نقطهٔ O به‌صورت $O(-R,R)$ است، حال معادلهٔ این دایره را می‌نویسیم:



$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2$$

$$\xrightarrow{O(-R,R)} (x+R)^2 + (y-R)^2 = R^2$$

دایرهٔ فوق باید از نقطهٔ $O(-1,2)$ بگذرد، پس داریم:

$$(-1+R)^2 + (2-R)^2 = R^2$$

$$\Rightarrow 1 - 2R + R^2 + 4 - 4R + \cancel{R^2} = \cancel{R^2}$$

$$\Rightarrow R^2 - 6R + 5 = 0 \Rightarrow (R-1)(R-5) = 0 \Rightarrow R = 1, 5$$

یعنی دو دایره با شعاع ۱ و ۵ با ویژگی‌های گفته‌شده وجود دارد.

۸. گزینهٔ «۱»

ابتدا معادلهٔ بیضی را ساده می‌کنیم: $(4x^2 + \ldots) + (9y^2 + \ldots) = 1$

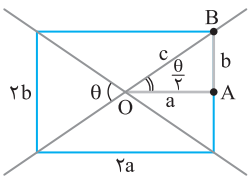
با توجه به نکتهٔ گفته‌شده:

$$e = \sqrt{1 - \frac{\text{کوچک‌ترین ضریب بین ضرایب } x^2 \text{ و } y^2}{\text{بزرگ‌ترین ضریب بین ضرایب } x^2 \text{ و } y^2}}$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

۹. گزینهٔ «۲»

با توجه به مستطیل کمکی در رسم هذلولی داریم:



$$\overset{\triangle}{OAB}: \cos\frac{\theta}{2} = \frac{a}{c} = \frac{1}{e}$$

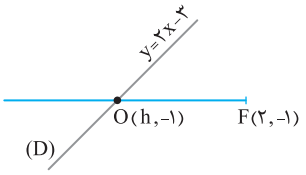
با توجه به روابط مثلثاتی داریم:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = 2\left(\frac{1}{e}\right)^2 - 1$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{e^2} - 1$$

۱۰. گزینهٔ «۲»

می‌دانیم که در هذلولی افقی عرض کانون‌ها و مرکز هذلولی با هم برابرند زیرا هر دو در یک امتدادند. پس با توجه به شکل مقابل داریم:



$$\xrightarrow{O\in D} -1 = 2h - 3 \Rightarrow h = 1$$

$$\Rightarrow |OF| = x_F - x_O \Rightarrow c = 2 - 1 = 1$$

از طرفی خروج از مرکز هم داده شده است، پس:

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{1}{a} \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

حال معادلهٔ هذلولی افقی با مرکز $O(1,-1)$ را می‌نویسیم:

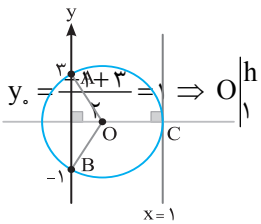
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \xrightarrow[b^2=\frac{5}{9}]{a^2=\frac{4}{9}} \frac{(x-1)^2}{\frac{4}{9}} - \frac{(y+1)^2}{\frac{5}{9}} = 1$$

$$\xrightarrow{\times\frac{1}{9}} \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{5} = \frac{1}{9}$$

آزمون جامع ۲

۱. گزینهٔ «۲»

کافی است شکل دایره را رسم کنیم. عمودمنصف پاره‌خط از مرکز دایره می‌گذرد، پس:



$$y_0 = \frac{8+3}{2} = 1 \Rightarrow O\left|\begin{array}{l} h \\ 1 \end{array}\right.$$

فاصلهٔ مرکز دایره از نقاط A، B و C همان شعاع دایره است، پس:

$$R = OA = OC$$

$$\begin{cases} O(h,1) \\ A(0,3) \end{cases} \Rightarrow OA = \sqrt{(h-0)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{h^2+4}$$

(نقاط O و C در یک امتدادند، کافی است طول این دو نقطه را از هم کم کنیم.)

$$OC = |h-1|$$

$$\Rightarrow OA = OC$$

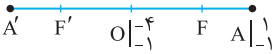
$$\Rightarrow \sqrt{h^2+4} = |h-1| \xrightarrow{\text{توان ۲}} \cancel{h^2} + 4 = \cancel{h^2} - 2h + 1$$

$$\Rightarrow 2h = -3 \Rightarrow h = \frac{-3}{2}$$

$$\Rightarrow R = OC = |h-1| = \left|\frac{-3}{2} - 1\right| = \frac{5}{2} = 2/5$$

۲- گزینهٔ «۴»

در بیضی افقی کانون‌ها و رئوس کانونی در یک امتدادند، پس شکل زیر را رسم می‌کنیم:



$$\Rightarrow |OA| = x_A - x_O = ۱-(-۴) = ۵ \Rightarrow a = ۵$$

اندازهٔ وتر کانونی بیضی برابر $\frac{۲b^۲}{a}$ است، پس:

$$\frac{۲b^۲}{a} = \frac{۱۸}{۵} \Rightarrow \frac{۲b^۲}{۵} = \frac{۱۸}{۵} \Rightarrow b^۲ = ۹$$

معادلهٔ بیضی افقی:

$$\frac{(x-h)^۲}{a^۲} + \frac{(y-k)^۲}{b^۲} = ۱$$

$$\Rightarrow \frac{(x+۴)^۲}{۲۵} + \frac{(y+۱)^۲}{۹} = ۱ \xrightarrow[x=۰]{\text{تلاقی با y ها}}$$

$$\frac{(۰+۴)^۲}{۲۵} + \frac{(y+۱)^۲}{۹} = ۱$$

$$\Rightarrow \frac{(y+۱)^۲}{۹} = ۱ - \frac{۱۶}{۲۵} = \frac{۹}{۲۵}$$

$$\Rightarrow \frac{y+۱}{۳} = \pm\frac{۳}{۵} \Rightarrow y+۱ = \pm\frac{۹}{۵}$$

$$\Rightarrow y = -۱ \pm \frac{۹}{۵}$$

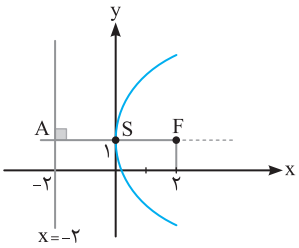
$$\Rightarrow \begin{cases} y = -۱ - \frac{۹}{۵} = \frac{-۱۴}{۵} = -۲/۸ \\ y = -۱ + \frac{۹}{۵} = \frac{۴}{۵} = ۰/۸ \end{cases}$$

۳- گزینهٔ «۲»

سهمی افقی است، پس رأس سهمی و کانون در راستایی به موازات محور x ها قرار دارند، یعنی عرض کانون و رأس سهمی با هم برابر است. چون سهمی بر محور y ها مماس است، پس طول رأس سهمی هم برابر صفر است، پس:

$$F(۲,۱) \xrightarrow{\text{سهمی افقی}} S(۰,۱) \Rightarrow SF = P = ۲$$

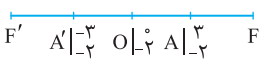
از طرفی با توجه به شکل، دهانهٔ سهمی به سمت راست است و می‌دانیم که: $SF = SA = P = ۲$، پس معادلهٔ خط هادی $x = -۲$ است که نیمساز ربع اول و سوم را در $y = -۲$ قطع می‌کند، زیرا:



$$\begin{cases} x = -۲ \\ y = x \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} y = -۲$$

۴- گزینهٔ «۳»

از آن‌جایی‌که عرض رئوس هذلولی با هم برابرند، متوجه می‌شویم که هذلولی افقی است، پس با توجه به شکل زیر داریم:



$$\Rightarrow \begin{cases} O = \frac{F+F'}{۲} \Rightarrow O(h,k) = (۰,-۲) \\ |OA| = x_A - x_O = ۳ - ۰ = ۳ \Rightarrow a = ۳ \end{cases}$$

حال با اطلاعات فوق معادلهٔ هذلولی افقی را می‌نویسیم:

$$\frac{(x-h)^۲}{a^۲} - \frac{(y-k)^۲}{b^۲} = ۱ \Rightarrow \frac{(x-۰)^۲}{۹} - \frac{(y+۲)^۲}{b^۲} = ۱$$

هذلولی از نقطهٔ $M(۵,۲)$ می‌گذرد، پس مختصات نقطهٔ M در آن باید صدق کند:

$$\frac{(۵-۰)^۲}{۹} - \frac{(۲+۲)^۲}{b^۲} = ۱ \Rightarrow \frac{۲۵}{۹} - \frac{۱۶}{b^۲} = ۱ \Rightarrow \frac{۲۵}{۹} - ۱ = \frac{۱۶}{b^۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۱۶}{۹} = \frac{۱۶}{b^۲} \Rightarrow b^۲ = ۹ \Rightarrow b = ۳$$

در هذلولی افقی شیب مجانب‌ها برابر $\pm\frac{b}{a}$ است، پس:

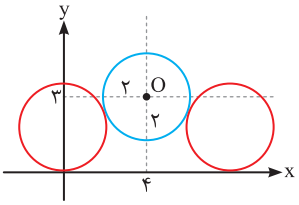
$$\begin{cases} m = \pm\frac{۳}{۳} = \pm ۱ \\ O(۰,-۲) \end{cases} \xrightarrow{\text{معادلهٔ مجانب‌ها}} y-(-۲) = (\pm ۱)(x-۰)$$

$$y = \pm x - ۲ \Rightarrow \begin{cases} y = x-۲ \Rightarrow x = y+۲ \\ y = -x-۲ \Rightarrow y+x+۲ = ۰ \end{cases}$$

۵- گزینهٔ «۲»

ابتدا شکل دایرهٔ داده‌شده را رسم می‌کنیم:

$$(x-۴)^۲ + (y-۳)^۲ = ۴ \Rightarrow O(۴,۳), R = ۲$$



با توجه به شکل دو دایره در سمت راست و چپ نقطهٔ O با شعاع ۲ وجود دارد که بر دایرهٔ مذکور و محور x ها مماس باشد.

(دایره‌های قرمز رنگ)

۶- گزینهٔ «۲»

$$e = \sqrt{۱ - \frac{۶۴}{۱۰۰}} = \sqrt{\frac{۳۶}{۱۰۰}} = \frac{۶}{۱۰}$$

۷- گزینهٔ «۲»

چون ضریب $x^۲$ و $y^۲$ با هم برابر است، یک دایره را مشخص می‌کند و از آن‌جایی‌که عبارت بزرگ‌تر از صفر است نقاط بیرون دایره را مشخص می‌کند.

تذکر: اگر $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ معادلهٔ یک دایره باشد، آن‌گاه:

$x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰ \rightarrow$ نقاط روی دایره

$x^۲ + y^۲ + ax + by + c < ۰ \rightarrow$ نقاط داخل دایره

$x^۲ + y^۲ + ax + by + c > ۰ \rightarrow$ نقاط بیرون دایره

۸- گزینهٔ «۱»

محل تلاقی محورهای تقارن بیضی همان مختصات مرکز بیضی است، پس:

$$\begin{cases} x = ۱ \\ y = ۲ \end{cases} \Rightarrow O(۱,۲) \Rightarrow$$ گزینهٔ ۱ یا ۴

از طرفی $e = \frac{۱}{۲}$ است، لذا در گزینهٔ «۱» داریم:

$$e = \sqrt{۱ - \frac{۳}{۴}} = \sqrt{\frac{۱}{۴}} = \frac{۱}{۲}$$

۹- گزینهٔ «۳»

صورت مسأله یک سهمی را معرفی می‌کند. در معادلهٔ سهمی یا عبارت x^2 داریم یا y^2، بیضی در معادلهٔ سهمی هم‌زمان x^2 و y^2 را نداریم، پس:

$$\text{در سهمی‌افقی } y^2 \text{ داریم} \Rightarrow a^2-1=0 \Rightarrow a=+1,-1$$

$$\text{در سهمی قائم } x^2 \text{ داریم} \Rightarrow a+1=0 \Rightarrow a=-1$$

چون به ازای $a=-1$، هر دو ضریب x^2 و y^2 صفر می‌شود، قابل قبول نبوده و $a=10$ جواب است.

۱۰- گزینهٔ «۲»

محل تلاقی مجانب‌های هذلولی همان مرکز هذلولی است که وسط دو کانون قرار دارد، پس:

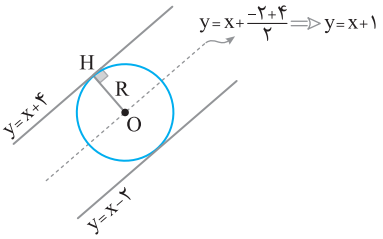
$$O=\frac{F+F'}{2} \Rightarrow O\left|\begin{array}{l}\frac{-1+3}{2}=1\\ \frac{5+1}{2}=3\end{array}\right. \Rightarrow O(1,3)$$

فاصلهٔ نقطهٔ $O(1,3)$ تا مبدأ مختصات برابر $\sqrt{x^2+y^2}$ یعنی $\sqrt{1+9}$ یا $\sqrt{10}$ است.

آزمون جامع ۳

۱- گزینهٔ «۳»

در سؤال گفته شده است که مرکز دایره روی محور yها است، یعنی $h=0$ پس مرکز دایره به صورت $O(0,k)$ است. حال شکل زیر را در نظر می‌گیریم:



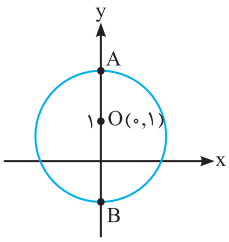
یعنی مختصات مرکز دایره روی خط $y=x+1$ است، پس در معادلهٔ خط صدق می‌کند:

$$k=0+1 \Rightarrow k=1 \Rightarrow O(0,1)$$

حال فاصلهٔ نقطهٔ O را تا یکی از خطوط پیدا می‌کنیم تا شعاع دایره به دست آید.

$$\begin{cases}O(0,1)\\ x-y+4=0\end{cases} \Rightarrow OH=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|0-1+4|}{\sqrt{1+1}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

حال شکل دایره را رسم می‌کنیم:



$$\begin{cases}y_A=1+R=1+\frac{3}{\sqrt{2}}=1+\frac{3\sqrt{2}}{2}=\max\\ y_B=1-R=1-\frac{3}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

۲- گزینهٔ «۲»

معادلهٔ داده‌شده یک بیضی است که بزرگ‌ترین وترش همان قطر بزرگ بیضی است که برابر $2a$ است، پس کافی است a را محاسبه کنیم. برای این کار کافی است معادلهٔ بیضی را به فرم استاندارد بنویسیم:

$$(4x^2-8x)+(5y^2+20y)=1 \Rightarrow 4(x^2-2x)+5(y^2+4y)=1$$

$$\Rightarrow 4(x^2-2x+1)+5(y^2+4y+4)=1+4+5\times4=25$$

$$\xrightarrow{\div 25} \frac{4(x-1)^2}{25}+\frac{5(y+2)^2}{25}=1 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{\frac{25}{4}}+\frac{(y+2)^2}{5}=1$$

$$\Rightarrow a^2=\frac{25}{4} \Rightarrow a=\frac{5}{2} \Rightarrow AA'=2a=5$$

۳- گزینهٔ «۲»

می‌دانیم که ابعاد مستطیل کمکی $2a$ و $2b$ است، پس دو حالت را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases}2a=4\\ 2b=10\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}a=2\\ b=5\end{cases} \Rightarrow c^2=a^2+b^2=4+25=29 \Rightarrow c=\sqrt{29} \quad (1)$$

یا

$$\begin{cases}2a=10\\ 2b=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=5\\ b=2\end{cases} \Rightarrow c=\sqrt{29} \quad (2)$$

حالت اول:

$$\frac{\text{طول وتر کانونی}}{\text{خروج از مرکز}}=\frac{\frac{2b^2}{a}}{\frac{c}{a}}=\frac{2b^2}{c}=\frac{2\times25}{\sqrt{29}}=\frac{50}{\sqrt{29}}$$

حالت دوم:

$$\frac{2b^2}{c}=\frac{2\times4}{\sqrt{29}}=\frac{8}{\sqrt{29}}$$

که $\frac{8}{\sqrt{29}}$ در گزینه‌ها وجود دارد.

۴- گزینهٔ «۱»

شرط اینکه معادلهٔ $x^2+y^2+ax+by+c=0$ یک دایره را مشخص کند آن است که $a^2+b^2-4c>0$ باشد. در این مسأله داریم:

$$\begin{cases}a=a\\ b=2a\\ c=\frac{3}{2}a^2-a+\frac{3}{4}\end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2+b^2-4c=a^2+4a^2-6a^2+4a-3>0$$

$$\Rightarrow -a^2+4a-3>0 \Rightarrow a^2-4a+3<0 \Rightarrow (a-1)(a-3)<0$$

$$\Rightarrow 1<a<3$$

۵- گزینهٔ «۱»

کافی است دو معادله را تلاقی دهیم:

$$\begin{cases}y=x^2-2\\ x^2+4y^2=4\end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} x^2+4(x^2-2)^2=4$$

$$\Rightarrow x^2+4(x^4-4x^2+4)=4$$

$$\Rightarrow 4x^4-15x^2+12=0 \xrightarrow{x^2=t} 4t^2-15t+12=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=225-4\times4\times12=33$$

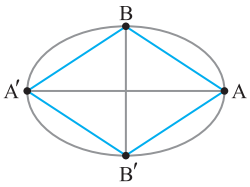
$$t=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{15\pm\sqrt{33}}{2\times4} \xrightarrow{t=x^2}$$

$$\begin{cases} x^{۲}=\dfrac{۱۵+\sqrt{۳۳}}{۸}>۰ \Rightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{۱۵+\sqrt{۳۳}}{۸}} \\ x^{۲}=\dfrac{۱۵-\sqrt{۳۳}}{۸}>۰ \Rightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{۱۵-\sqrt{۳۳}}{۸}} \end{cases}$$

پس ۴ مقدار برای x به دست می‌آید و چون هر چهار ریشه، ریشهٔ ساده هستند، پس دو منحنی در ۴ نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.

۶- گزینهٔ «۴»

با توجه به معادلهٔ پارامتری بیضی داریم:



$$\begin{cases} x=۳\sin\theta-۱ \\ y=۴\cos\theta-۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=۴ \\ b=۳ \\ O(-۱,-۲) \end{cases} \Rightarrow$$

چهارضلعی حاصل یک لوزی است که قطر بزرگ آن $۲a$ و قطر کوچک آن $۲b$ است. با توجه به مساحت لوزی داریم:

$$S=\frac{۲a\times ۲b}{۲}=۲ab \Rightarrow S=۲\times ۴\times ۳=۲۴$$

۷- گزینهٔ «۳»

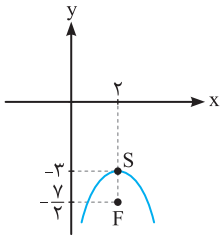
اگر نقطه درون دایره باشد، نمی‌توان از آن نقطه هیچ مماسی بر دایره رسم کرد و شرط آنکه نقطهٔ $A(a_{۰},y_{۰})$ درون دایره $C(x,y)$ باشد آن است که $C(x_{۰},y_{۰})<۰$ باشد، پس:

$$C(۳,۱)=۹+۱-۹+۱-m<۰ \Rightarrow m>۲$$

۸- گزینهٔ «۱»

طول رأس سهمی و کانون با هم برابر است، پس سهمی قائم است. کافی است شکل تقریبی این سهمی را رسم کنیم.

با توجه به شکل، مشخص می‌شود که دهانهٔ سهمی رو به پایین است و p برابر است با:



$$SF=p \Rightarrow p=-۳-(-\frac{۷}{۲})=\frac{۱}{۲}$$

حال معادلهٔ سهمی قائم رو به پایین را می‌نویسیم:

$$(x-h)^{۲}=-۴p(y-k) \Rightarrow (x-۲)^{۲}=-۴\times\frac{۱}{۲}(y+۳)$$

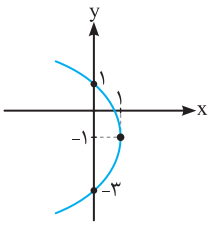
$$\Rightarrow x^{۲}-۴x+۴=-۲y-۶ \Rightarrow x^{۲}+۲y-۴x+۱۰=۰$$

$$\Rightarrow x^{۲}+۲y+۱۰=۴x$$

۹- گزینهٔ «۳»

کافی است شکل سهمی را به‌طور تقریبی رسم کنیم تا متوجه شویم که سهمی افقی است یا قائم.

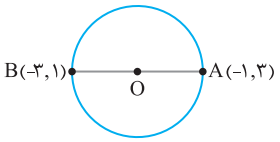
با توجه به شکل مشخص می شود که سهمی افقی و دهانهٔ آن به سمت چپ است، پس گزینهٔ «۱» حذف می‌شود.



از بین سه گزینهٔ داده‌شده مختصات نقطهٔ $(۰,۱)$ فقط در گزینه «۳» صدق می‌کند.

۱۰- گزینهٔ «۱»

با توجه به شکل O وسط AB است، پس:



$$O=\frac{A+B}{۲} \Rightarrow O(-۲,۲)$$

فاصلهٔ OA همان شعاع دایره است، پس:

$$OA=\sqrt{(-۲+۱)^{۲}+(۲-۳)^{۲}}=\sqrt{۲} \Rightarrow R=\sqrt{۲}$$

$$(x-h)^{۲}+(y-k)^{۲}=R^{۲} \Rightarrow (x+۲)^{۲}+(y-۲)^{۲}=۲$$

$$\Rightarrow x^{۲}+۴x+۴+y^{۲}-۴y+۴=۲$$

$$\Rightarrow x^{۲}+y^{۲}+۴x-۴y+۶=۰$$